كثيرات الحدود – معادلاتها – جذورها

(٣- ١-) كثيرات الحدود :

نسمي التابع f (x) المعرف بالشكل التالي :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0 \qquad (٣-١)$$

كثير من حدود من الدرجة n بالنسبة للمتحول x حيث أن n عدد صحيح موجب و $a_n \neq 0$ حيث (a_n ، a_{n-1} ، a_{n-2} ، ....$*a_1*a_0$) أمثال كثير الحدود و هي أعداد مركبة كذلك x متحول مركب ، مثلا" من أجل n = 4 نحصل على كثير حدود من الدرجة الرابعة .

مثال :

$$f(x) = 2x^4 – 3x^3 + 5x^2 + 2x - 14$$

ملاحظة :

١- من أجل n = 0 نحصل على كثير حدود من الدرجة صفر و هو عدد ثابت $d(x) = a_0$

٢- من أجل n = 1 نحصل على كثير حدود من الدرجة الأولى و يسمى كثير حدود خطي .

(٣ – ١ – ١) العمليات على كثيرات الحدود :

ليكن لدينا كثيري الحدود التاليين :

$$f\ (x) = a_n x^{n} + a_{n-1}\ x^{n-} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

$$g\ (x) = b_m x^{m} + b_{m-1} x^{m-} + \ldots\ldots\ldots + b_1 x + b_0$$

١- تساوي كثيري الحدود :

نقول عن كثير الحدود $f\ (x)$ و $g\ (x)$ أنـهما متساويان إذا تساوت أمثلها من أجل جميع قيم x المماثلة أي $n = m$ و $i = \Gamma, n$ $b_i = a_i$

ν

٢- عملية الجمع (الطرح) :

نقول عن كثير الحدود $h(x)$ من الدرجة $K \le \max(n, m)$ أنه حاصل جمع (طرح) كثيري الحدود $f(x)$ و $g(x)$ إذا كان

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \qquad (٣-٢)$$

$$h(x) = c_k y^k \pm c_{k-1} x^{k-1} \ldots\ldots\ldots \pm c_0$$

حيث أمثاله ci تعطى بالعلاقة

$$c_i = a_i \pm b_i \quad .i = 0.k$$

٣- عملية الضرب :

نقول عن كثير الحدود $L(x)$ من الدرجة $k = n + m$ إنه حاصل ضرب كثيري الحدود

$f(x)$ و $g(x)$ إذا كان

$$L(x) = f(x) \,.\, g(x) \qquad (٣-٣)$$

و نحصل عليه بضرب كل حد من حدود كثير الحدود $f(x)$ بجميع حدود كثير الحدود $g(x)$ ثم نجمع الحدود المتشابهة .

إن حاصل ضرب كثير الحدود $f(x)$ بعدد $c \neq 0$ هو كثير حدود من نفس الدرجة و لكن أمثاله ناتجة عن ضرب أمثال كثير الحدود $f(x)$ بالعدد c و يكتب $c \,.\, f(x)$

مثال :

ليكن لدينا كثيري الحدود

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 5$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$$

أوجد مجموعهم و فرقهم و حاصل ضرب $f(x)$ بـــ $g(x)$ و $c\,f(x)$

حيث $c = 5$

الحل :

الجمع : $h_1(x) = f(x) + g(x)$

$$h1(x) = x^3 - x^2 - 2$$

الطرح : $h_2(x) = f(x) - g(x)$

$$h2(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 8$$

الضرب :

$$L(x) = f(x) \cdot g(x) = 2x^5 - 11x^4 + 22x^3 - 29x^2$$

$$1x - 15$$

$$C\,f(x) = 5\,f(x) = 10x^2 - 25x + 15$$

(٣-١-٢) خواص عمليتي الجمع و الضرب لكثيرات الحدود :

١- **الخاصة التبديلية :** من أجل أي كثير حدود $f(x)$ و $g(x)$ يتحقق

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

$f(x) \cdot g(x)$

$= g(x) \cdot f(x)$

٢- **الخاصة التجميعية :** من أجل أي كثيرات حدود $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ يتحقق :

$$f(x) + [\, g(x) + h(x) \,] = [f(x) + g(x) \,] + h(c)$$

$$f(x) \cdot [\, g(x) + h(x) \,] = [f(x) \cdot g(x) \,] \cdot h(c)$$

٣- الضرب توزيعي على الجمع : من أجل أي كثيرات حدود $f(x)$ و g (x) و $h(x)$ يتحقق :

$$[f(x) + g(x) \,]\, h(c) = f(x)\, h(c) + g(x)\, h(x)$$

$$h(x) \cdot [f(x) + g(x) \,] = h(x) \cdot f(x) + h(x) \cdot g(x)$$

٤- من أجل أي كثيري حدود $f(x)$ و $g(x)$ يوجد كثير حدود $h(x)$ يحقق المساواة التالية :

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

(٣-١-٣) قسمة كثيرات الحدود :

ليكن $f(x)$ و $g(x)$ كثير حدود حيث $g(x) \neq 0$ و درجة كثير الحدود $f(x)$ أكبر أو تساوي درجة كثير الحدود $g(x)$ فإنه ينتج عن قسمة $f(x)$ على $g(x)$ كثيري حدود $h(x)$ و $r(x)$

$$f(x) = g(x)\,h(x) + r(x)$$

حيث $h(x)$ و $r(x)$ يتعينان بشكل وحيد . و درجة كثير الحدود $r(x)$ أصغر من درجة كثير الحدود $g(x)$.

و نسمي كثير الحدود $f(x)$ بالمقسوم و كثير الحدود $g(x)$ بالقاسم (أو المقسوم عليه) و كثيرا الحدود $h(x)$ بحاصل القسمة و كثير الحدود $r(x)$ بالباقي القسمة .

مثال١ :

ليكن لدينا كثير الحدود :

$$f(x) = 6x^4 + x^3 - 5x^2 + 6$$

$g(x) = 2x^3 + x^2 -$

$2x + 2$

أوجد حاصل قسمة $f(x)$ على $g(x)$

الحل :

يمكن إتمام عملية القسمة بالشكل التقليدي التالي :

$6x^4 + 1x^3 - 5x^2 + 0x + 6$

$2x^2 - x^2 - 2x + 2$

$\underline{\pm 6x^4 \pm 3x^3 \pm 6x^2}$

$3x + 2$

$4x^3 + x2 - 6x + 6$

$\underline{4x^3 \pm 2x^2 \pm 4x \pm 4}$

$3x^2 - 2x + 2$

ينتج :

$f(x) = g(x)\ \ (3x +2\ ) + (\ 3x^2 - 2x + 2\ )$

حيث نلاحظ :

$$h(x) = 3x + 2$$

$$r(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

مثال٢ :

ليكن لدينا كثيري الحدود

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

أوجد حاصل قسمة $f(x)$ على $g(x)$

الحل :

$$f(x) = g(x)(3x + 2) = g(x) \cdot h(x)$$

نلاحظ

$$r(x) = 0$$

(٣-١-٤) القواسم و القاسم المشترك الأعظمي :

ليكن لدينا كثيري الحدود غير معدودين $f(x)$ و $g(x)$ نسمي كثير الحدود $g(x)$ قاسم لكثير الحدود $f(x)$ إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)$ معدم أو كثير الحدود $g(x)$ قاسما" لكثير الحدود $f(x)$ عندما فقط توجد كثير حدود $h(x)$ يحقق العلاقة :

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad (4\text{-}3)$$

حيث نلاحظ :

$$r(x) = 0$$

تحقق العلاقة (4-3) يعني أن كلا من $g(x)$ و $h(x)$ قاسم لـــ $f(x)$ و $f(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ و $h(x)$.

إذا كان لدينا كثيري حدود $f_1(x)$ و $f_2(x)$ نقول عن كثير حدود $g(x)$ أنه قاسم مشترك لكثيري الحدود $f_1(x)$ و $f_2(x)$ إذا كان قاسما" لكل من $f_1(x)$ و $f_2(x)$ أي يوجد كثيري حدود $h_1(x)$ و $h_2(x)$ بحيث يكون :

$$f_1(x) = g(x)\, h_1(x)$$

$$f_2(x) = g(x)h_2(x)$$

كما نسمي $g(x)$ قاسم مشترك أعظم لكثيري الحدود $f_1(x)$ و $f_2(x)$ إذا كان يقبل القسمة على كل قاسم مشترك آخر $g_i(x)$ لكثيري الحدود $f_1(x)$ و $f_2(x)$.

الخواص الأساسية لقسمة كثيرات الحدود :

١- إذا كان $f(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ و $g(x)$ يقبل القسمة على $h(x)$ فإن $f(x)$ يقبل القسمة على $h(x)$

٢- إذا كان $f(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ و $g(x)$ يقبل القسمة على $f(x)$ فإن العلاقة التالية محققة .

$$f(x) = c \,.\, g(x) \;;\;\; c \neq 0 \qquad (٥\text{-}٣)$$

و إذا تحققت العلاقة (٣-٥) فإن كلا من $f(x)$ و $g(x)$ يقبل القسمة على الآخر .

٣- إذا كان $f(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ فإن جداء $f(x)$ بأي كثير حدود آخر يقبل القسمة على $g(x)$

٤- إذا كان كلا من $f_1(x)$ و $f_2(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ فإن مجموعها و فرقهما و جدائهما يقبل القسمة على $g(x)$

٥- كل كثير حدود يقبل القسمة على كثير حدود من الدرجة الصفر أي يقبل القسمة على عدد $c\neq 0$

٦- إذا كان $f(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ فإن $c\,f(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ حيث $c\neq 0$

٧- إن كل قاسم لأحد كثيري الحدود $f(x)$ و $cf(x)$ مع $c\neq 0$ يكون قاسما" لكثير الحدود الآخر

و لإيجاد القاسم المشترك الأعظم لكثيري الحدود $f(x)$ و $g(x)$ نتبع الخطوات التالية :

١- لنفرض أن درجة كثير الحدود $f(x)$ أكبر أو تساوي درجة كثير الحدود $g(x)$ فعندئذ نقسم $f(x)$ عل $g(x)$ و ليكن ناتج القسمة $h(x)$ و باقي القسمة $r(x)$

٢- نقسم $g(x)$ على $r(x)$ و ليكن الناتج القسمة $h_1(x)$ و الباقي $r_1(x)$

٣- نقسم $r(x)$ على $r_1(x)$ و ليكن الناتج $h_2(x)$ و الباقي $r_2(x)$

٤- نستمر في هذه العملية حتى نصل إلى باقي $r_n(x)$ يقسم $r_{n-1}(x)$ يكون ناتج القسمة $h_{n+1}(x)$ و بذلك يكون $r_n(x)$ هو القاسم المشترك الأعظم لكثير الحدود $f(x)$ و $g(x)$ و نلخص الخطوات السابقة كما يلي :

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x)$$

$$g(x) = r(x)h_1(x) + r_1(x)$$

$$r(x) = r_1(x)h_2(x) + r_2(x) \qquad (6\text{-}3)$$

- - - -

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}hn(x) + r_n(x)$$

$$r_{n-1}(x) = r_n(x)h_{n+1}(x)$$

حسب تعريف القاسم المشترك الأعظم يمكننا القول بأنه إذا كان هنالك قاسمين مشتركين أعظميين $\acute{r}_n(x)$ و $r''_n(x)$ لكثيري الحدود $f(x)$ و $g(x)$ فإن :

$$\acute{r}_n(x) = c r''_n(x) \quad ; \quad c \neq 0$$

و ذلك بالاعتماد على الخاصة الثانية من خواص قسمة كثيرات الحدود

كما يمكننا القول بأن كثيرا حدود يكونان أوليين فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الأعظم لهما هو كثير حدود من الدرجة صفر

مثال : أوجد القاسم المشترك الأعظم لكثيري الحدود التاليين :

$$f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 1$$

الحل :

بما أن درجة $f(x)$ أكبر من درجة $g(x)$ فإننا نقسم $f(x)$ على $g(x)$ فنجد أن

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$\pm x^5 \pm x^4 \pm 2x^3 \pm x^2 \pm x \qquad x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 1$$

$$r(x) = x^2 - 1 \qquad x = h(x)$$

و بالتالي فإن :

$$h(x) = x \ , \ r(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

الآن نقسم $g(x)$ على $r(x)$ فنجد

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 1$$

$$x^2 - 1$$

$$\pm x^4 \qquad \pm x^2$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 1 \quad x^2 + x + 3 = h_1(x)$$

$$\pm x^3 \qquad \pm x$$

$3x^2 + 2x - 1$

$\pm 3x^2 \quad\quad \pm 3$

$2x + 2 = r_1(x)$

و بالتالي فإن :

$h_1(x) = x^2 + x + 3 \quad , \quad r_1(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$

نلاحظ أن : $r(x) = (x-1)(x+1) = r_1(x)1/2(x-1)$

فإذا وضعنا في العلاقة الأخيرة $h_2(x) = 1/2(x-1)$ بحسب العلاقات (٣-٦) فإن $r_1(x)$ هو القاسم المشترك الأعظم المشترك لكثيري الحدود $f(x)$ و $g(x)$ لأن $r_1(x)$ يقسم $r(x)$

مثال :

أوجد القاسم المشترك الأعظم لكثير الحدود

$f(x) = x4 + 3x^3 – x2 – 4x – 3 \; ; \; g(x) = 3x^2 + 10x^2 + 2x – 3$

ملاحظة :

عند تطبيق طريقة إقليدس على كثيرات حدود ذات أمثال صحيحة ، نستطيع ضرب المقسوم أو اختصار المقسوم عليه على أي عدد غير صفري ، و ذلك للتخلص من الأمثال الكسرية و يمكن إجراء ذلك خلال عملية القسمة نفسها

لنقسم $f(x)$ على $g(x)$ و قبل ذلك نضرب $f(x)$ ب 3 :

$3x^4 + 9x^3 - 3x^2 -$

$12x - 9$

$\cancel{3x^4 \pm 10x^3 \pm 2x^2}$ $3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$

$\pm 3x$

$x + 1 = h(x)$

$- x^3 - 5x^2 - 9x - 9$

نضرب الباقي في 3 و نتابع عملية القسمة $+ 3x^2 + 15x^2 + 27x$

$+27$

$3x^3 \pm 10x^2 \pm 2x \pm 3$

$r(x) = 5x^2 + 25x$

$+ 30$

نختصر الباقي r(x) على 5 يصبح الباقي $r(x) = x^2 + 5x + 6$ ثم نقسم g(x) على r(x) كما يلي :

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & \\ \cancel{3x^3 \pm 15x^2 \pm 1}8x & \underline{\qquad\qquad} \quad x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

$3x - 5 = h_1(x)$

$- 5x^2 - 16x - 3$

$\cancel{\pm 5x^2 \pm 25x \pm}\ 30$

$$r_1(x) = 9x + 27$$

نختصر $r_1(x)$ على 9 ينتج $r_1(x) = x + 3$ و بالتالي

$$h(x) = 3x - 5$$

نقسم $r(x)$ على $r_1(x)$ فينتج

$$r(x) = x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = r_1(x)(x+2)$$

و الباقي صفر إذا" القاسم المشترك الأعظمي $r_1(x) = x + 3$

(٣-٢) جذور كثيرات الحدود و نظريتا الباقي و القاسم :

(٣-٢-١) جذور كثير الحدود :

إذا كان $f(x)$ كثير حدود فإننا نسمي القيمة x_0 بجذر أو صفر كثير الحدود $f(x)$ إذا انعدم في x0 أي إذا تحقق $f(x_0) = 0$ و للحصول على جذور (أصفار) كثير الحدود فإننا نضع $f(x) = 0$ معادلة كثيرا الحدود المذكور و نبحث عن قيم x0 التي تحققها ، أما تلك القيم فقد تكون حقيقية أو مركبة

(٣-٢-٢) نظرية بيزو :

باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على كثير الحدود الخطي (x-a) يساوي قيمة كثير الحدود $f(x)$ من أجل x=a

البرهان :

لدينا : $f(x) = (x-a)q(x) + R$

و نظرا" لأن تلك العلاقة صحيحة من أجل كل قيم x و منها x=0 يكون :

$(a) = (a-a)q(x) + R$

f

$(a) = R$

f

مثال :

ليكن $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ و $g(x) = x - 2$

بالتقسيم $f(x)$ على $g(x)$ نجد

$$X^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (x-2)(x2 + 4x + 5) + 6$$

و هنا $R = 6$ يمكن الحصول على هذا الناتج بتطبيق نظرية الباقي

$$R = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) - 4 = 6$$

(٣-٢-٣) نظرية القاسم :

إذا كان $(x-a)$ قاسما" لـ $f(x)$ يكون عندئذ $f(a) = 0$ و بالعكس كان (a) $f= 0$ فإن $(x-a)$ هو قاسم لـ $f(x)$

البرهان :

لدينا في القسمة و بالاستعانة بنظرية الباقي :

$$f(x) = (x-a)q(x) + f(a)$$

إن $(x-a)$ قاسم و هذا يعني أن $f(a) = 0$ و بالعكس ، فإذا كان لدينا (a) $f= 0$ فهذا يعني أن $(x-a)$ هو قاسم لـ $f(x)$

٣- التقسيم التركيبي :

يمكن إجراء قسمة كثير الحدود $f(x)$ على ثنائي الحدين (x-a) الخطي و ذلك من خلال إنشاء ثلاثة سطور و بتطبيق الخطوات التالية مستعينين بالمثال التالي :

$$\frac{5x^4 - 8x^2 - 15x - 6}{x-2}$$

١- ترتيب المقسوم $f(x)$ بقوى تنازلية إن لم تكن كذلك و وضع الأمثال بالترتيب في السطر الأول مع الانتباه إلى وضع الصفر كمثال للحدود الناقصة و نضع أيضا" a إلى اليمين في السطر الأول

في مثالنا لدينا $f(x)$ مرتب بقوى تنازلية لنأخذ الأمثال بالترتيب و نضعها في السطر الأول و نضيف $a = 2$ إلى يمين السطر الأول

$$5 \quad 0 \quad -8 \quad -15 \quad -6 \quad \llcorner 2$$

لنلاحظ أننا وضعنا صفرا" للحد الناقص الممثل لــ a_3x^3

٢- لنعد كتابة a_n أمثال x_n في السطر الثالث و بنفس العمود فيكون :

$5 \quad 0 \quad -8 \quad -15 \quad -6 \quad \llcorner 2$

السطر الأول

10

السطر الثاني

---

5 السطر الثالث

٣- لنأخذ الجداء $a . a_n$ و نضع الناتج في السطر الثاني و العمود الثاني ثم نأخذ مجموع العمود الثاني ، فيكون :

5   0   -8   -15   -6   ∟2

10

5   10

٤- نعيد العملية بضرب ناتج العملية السابقة بـــ a و نضع الناتج في السطر الثاني تحت a_{n-2} ثم نجمع العمود الثالث و نضع الناتج في السطر الثالث / لنفس العمود

5   0   -8   -15   -6   ∟2

10   20

5   10   12

٥- نكرر نفس العملية حتى نصل إلى إضافة آخر ناتج إلى الثابت a_0

$$
\begin{array}{ccccc|l}
5 & 0 & -8 & -15 & -6 & \llcorner 2 \\
 & 10 & 20 & 24 & 18 & \\
\hline
5 & 10 & 12 & 9 & 12 &
\end{array}
$$

و تكون الحدود الناتجة أخيرا" أمثال ناتج القسمة $q(x)$ و هو من الدرجة $n-1$

أما الحد الأخير و هو هنا ١٢ فهو يمثل الحد الباقي $f(a) = R$ و ناتج القسمة في مثالنا يصبح

$$q(x) = 5x^3 + 10x^2 + 12x + 9$$

$$R = f(2) = 12$$

أي :

$$\frac{5x^4 - 8x^2 - 15x - 6}{x-2} = 5x^3 + 10x^2 + 12x + 9 + 12/x-2$$

أو :

$$5x^4 - 8x^2 - 15x - 6 = (x-2)(5x^3 + 10x^2 + 12x + 9)$$

(٣-٣) – معادلات كثير الحدود و جذورها :

نحصل على المعادلة كثيرة الحدود بوضع كثير الحدود $f(x)$ مساويا" للصفر و الشكل القياسي لمعادلة كثير الحدود هو :

$$A_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots\ldots. + a_1 x + a_0 = 0$$

شكل متعارف عليه حيث تتدرج فيه القوى من الأكبر إلى الأصغر و فيه $a_n \neq 0$ و أمثاله لا تقبل قاسما" لها غير ± 1 ، فمثلا" إذا كان لدينا المعادلة :

$$-10x^5 - 2x^2 + 6x - 4x^3 + 2 = 0$$

فالشكل القياسي لها هو :

$$5x^5 + 0x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$$

نحن نعلم سابقا" أن معادلة الدرجة الأولى لها حلا" وحيدا" و أن معادلة الدرجة الثانية لها حلان حقيقيان أو عقديان ، سنستعرض فيما يلي للحالة العامة للمعادلات من الدرجة n

نظرية :

نقول عن x_0 أنه جذر أو صفر كثير الحدود $f(x)$ إذا تحقق $f(x_0) = 0$
ينتج عن ذلك أن فصل نقاط منحني التابع $y = f(x)$ مع المحور X هي
نفسها جذور $f(x) = 0$

(١-٣-١) – النظرية الأساسية في الجبر :

لكل معادلة كثير حدود $f(x) = 0$ جذر واحد على الأقل ، و الجذور قد
تكون حقيقية أو عقدية

في الحقيقة ، إن معادلة كثير الحدود من الدرجة n لها تماما" n جذر ، و
هذه الجذور قد لا تكون جميعها متميزة عن بعضها ، و عندها نقول إن
للمعادلة جذور مشتركة

مثال :

لنبحث عن جذور المعادلة :

$$x^5 - x^3 = 0$$

الحل :

هذه المعادلة من الدرجة الخامسة و لها إذن خمسة جذور ، لنكتبها على الشكل :

$$x^5 - x^3 = x^3(x^2-1) = x^3(x+1)(x-1) = 0$$

و الجذور هي :

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0 \;;\; x_2 = 1 \;;\; x_1 = -1$$

و هنا نلاحظ أن لدينا جذرا" مكررا" ثلاث مرات

و سوف نستعرض بعض النظريات و العلاقات الخاص بخواص الجذور و الجذور المتوقعة لمعادلة كثير الحدود ثم ندرس في نهاية البحث حل معادلة كثير الحدود ذات الأمثال المركبة من الدرجة الأولى حتى الرابعة

(٣-٣-٢) – نظرية التحليل إلى عوامل خطية :

يمكن تحليل كل معادلة كثير حدود إلى جداء عوامل خطية ، لنأخذ مثلاً" كثير الحدود $f_n(x)$ من الدرجة n و حسب النظرية الأساسية في الجبر هناك جذر واحد على الأقل للمعادلة و ليكن x_1 هذا يعني إن كثير الحدود $(x-x_1)$ قاسم لـ $f_n(x)$ (أي R=0)

إذن :

$$f_n(x) = (x-x_1)\, f_{n-1}(x) \qquad (1)$$

حيث $f_{n-1}(x)$ كثير حدود من الدرجة n-1 و لكثير الحدود هذا جذر على الأقل و ليكن x_2 أي إن $(x-x_2)$ قاسم لــ $f_{n-1}(x)$ و

$$f_{n-1}(x) = (x-x_2)\, f_{n-2}(x)$$

و نعوض في (١) فينتج :

$$f_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\, f_{n-2}(x)$$

و نجد أن لكثير الحدود $f_{n-2}(x)$ جذر على الأقل و ليكن x_3 و هكذا نتابع و نحصل أخيرا" على :

$$f_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x-x_n)\, f_0(x)$$

حيث $f_0(x)$ كثير حدود من الدرجة صفر (أي عدد ثابت) و يساوي إلى an أمثال x_n في $f_n(x)$
أما عدد الحدود فيساوي إلى n حد خطي و نلاحظ أخيرا" إن عدد الجذور التي تجعل $f_n(x) = 0$ هو n و هي $x_1,x_2,\ldots,x_n$ و قد يكون منها ما هو مشترك

لنلاحظ أن أية قيمة أخرى مختلفة عن قيم $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ لا يمكن أن تعدم أيا" من الحدود الخطية السابقة و بالتالي لا يمكن أن يتجاوز عدد الجذور العدد n درجة $f_n\,(x)$

(٣-٣-٣) – الجذور العقدية :

نظرية :

إذا كان لمعادلة كثير الحدود $f(x) = 0$ ذات أمثال حقيقية و كان لـ $f(x)$ جذر عقدي من الشكل $a + ib$ يكون المرافق عندئذ $a - ib$ جذرا" أيضا" لــ $f(x) = 0$ أي :

$$f(\,a+ib) = f(\,a-ib) = 0$$

و هذا يعني أن عدد الجذور المركبة لكثير الحدود ذي الأمثال الحقيقية هو عدد زوجي و أن هذه الجذور مترافقة مثنى مثنى و عند تحليل $f(x)$ إلى

عوامل جداء خطية تظهر أيضا" هذه الحدود مترافقة مثنى مثنى على الشكل :

$$[\, x - (a+ib)\,.\,[\, x - (a-ib)]$$

مثال :

إن جذور المعادلة $x^3 - x^2 + x - 0$ هي التالية :

$$x_3 = 1/2 - \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x_2 = 1/2 + \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x^3 - x^2 + x = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

أي :

$$f(x) \neq x[\, x - (1/2 + i\sqrt{3}/2)][\, x - (1/2 - i\sqrt{3}/2)] = 0$$

(٣-٣-٤) – الجذور غير العادية :

نظرية :

إذا كان لمعادلة كثير الحدود $f(x) = 0$ ذات الأمثال العادية جذرا" غير عادي من الشكل $a + \sqrt{b}$ حيث a, b أعداد عادية ، و يكون عندئذ مرافق العدد غير العادي ، و هو $a - \sqrt{b}$ جذرا" أيضا" للمعادلة

ينتج أيضا" كما في حالة الجذور العقدية إن الجذور غير العادية هي جذور عددها زوجي و هي مترافقة مثنى مثنى

مثال :

المطلوب تشكيل معادلة $f(x) = 0$ بمعادلات صحيحة و بأصغر درجة ممكنة بحيث يكون $\sqrt{5}$ و $3i - 2$ جذرين لتلك المعادلة

الحل :

لكي تكون الأمثال صحيحة فيجب أن يكون المرافقان $\sqrt{5}$ و $3i - 2$ جذرين للمعادلة التي نريد تشكيلها إذن :

$$x_4 = 2 + 3i \quad , \quad x_3 = 2 - 3i \quad , \quad x_2 = -\sqrt{5} \quad , \quad x_1 = \sqrt{5}$$

هي جذور المعادلة المطلوبة و منه

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

أي

$$f(x) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})[x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)] = 0$$

و منه

$$x^4 - 4x^3 + 20x - 65 = 0$$
$$f(x) =$$

(٣-٣-٥) – حدود الجذور الحقيقة :

نقول عن العدد الحقيقي L أنه الحد الأعلى للجذور الحقيقية لـ $f(x) = 0$ إن لم يكن هناك أي جذر حقيقي أكبر من L و نقول عن العدد الحقيقي l أنه الحد الأدنى للجذور الحقيقية لـــ $f(x) = 0$ إن لم يكن هناك أي جذر حقيقي أصغر من l

إذا كان T جذرا" للمعادلة $f(x) = 0$ و قسمنا $f(x)$ على $(x-T)$ باستخدام التقسيم التركيبي و كانت جميع أعداد السطر الثالث موجبة يكون $T = L$

حدا" أعلى للجذور الحقيقية $f(x) = 0$ أما إذا لم تكن تلك الأعداد موجبة فهذا لا يعني استبعاد احتمال كون T كحد أعلى للجذور

إذا كان $t<0$ جذرا" للمعادلة $f(x) = 0$ و قسمنا $f(x)$ على $(x-T)$ باستخدام التقسيم التركيبي و كانت أعداد السطر الثالث متناوبة الإشارة عندئذ يكون $t=l$ حدا" أدنى للجذور الحقيقية لــ $f(x) = 0$ و إن لم تكن الإشارات متناوبة فهذا لا يعني استبعاد احتمال كون t كحد أدنى للجذور

(٣-٤) – الجذور العادية و كيفية إيجادها :

يكون لمعادلة كثير الحدود $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1x + a_0$ (1)

الصفر جذر لها إذا كان الحد الثابت مساويا" للصفر : $a_0 = 0$

مثال :

إن جذور المعادلة :

$$x^6 - 3x^4 + 2x^3 = x^3(x^3 - 3x + 2) = 0$$

هي $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ بالإضافة للجذور :

$$x_6 = 2 \ , \ x_5 = -1 \ , \ x_4 = -1$$

الخاصة بالمعادلة $x^3 - 3x + 2 = 0$

نظرية :

إذا كان العدد العادي p/q (المعبر عنه بأصغر حديه و p و q أوليين فيما بينهما) جذرا" لمعادلة كثير الحدود $f(x)$ التي يكون فيها $a_0 = 0$ فيكون p قاسما" للحد الثابت a_0 و q قاسما" لــ a_n معامل الحد الأول

البرهان :

لدينا :

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

حيث $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ و نظرا" لكون p/q جذرا" للمعادلة فإن :

$$a_n(p/q)^n + a_{n-1}(p/q) + \ldots\ldots\ldots + a_1(p/q) + a_0 = 0$$

لنضرب الطرفين ب q_n فينتج :

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots\ldots\ldots + a_1pq^{n-1} + a_0p^n = 0$$

أو

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots\ldots\ldots + a_1 p q^{n-1} = a_0 q^n$$

نلاحظ بالنسبة للطرف الأيسر أن المجموع يقبل القسمة على p و بالتالي فإن p هو قاسم للحد من اليمين و لما
كان p و q أوليين فيما بينهما فإن p هو قاسم لــ a_0 هذا و بنفس الأسلوب يمكن أن نبرهن أن q هو قاسم لــ a_n

من خلال هذه النظرية يمكن معرفة ما إذا كان من المحتمل أن يكون عدد عادي ما معطى جذر للمعادلة السابقة (١) كأن نتساءل مثلا" عن احتمال أن يكون العدد 3/2 جذرا" للمعادلة $9x^4 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$
و نلاحظ هنا أن $q = 2$ ليس قاسما" لــ $a_n = 9$ كما أن $p = 3$ ليس قاسما" لــ $a_0 = 4$ فنستنتج أنه من غير الممكن أن يكون 3/2 أحد جذور المعادلة المفروضة

أما إذا أردنا معرفة ما إذا كان من المحتمل أن يكون العدد 2/3 جذرا" للمعادلة السابقة .

فإننا نلاحظ أن ٣ هو قاسم للعدد ٩ و إن ٢ هو قاسم للعدد ٤ . إذن من المحتمل أن يكون 2/3 جذور للمعادلة السابقة .

تفيدنا هذه النظرية في معرفة جميع الأعداد التي من المحتمل أن تكون جذورا" لمعادلة من الدرجة n معطاة.
و ذلك بأخذ الأعداد التي يكون فيها المقام قواسم لمعامل الحد الأول a_n و يكون فيها البسط قواسم للحد الثابت a_0

مثال :

حدد الأعداد العادية التي من المحتمل أن تكون جذورا" للمعادلة

$$5x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$$

الحل :

أعداد المقام الممكن أن تكون قواسم للعدد 5 هي ± 1 , ± 5

أعداد البسط الممكن أن تكون قواسم للعدد 4 هي ± 1 , ± 2 , ± 4

و منه الأعداد العادية الممكنة كجذور هي :

$$\pm 1 \ , \ \pm 2 \ , \ \pm 4 \ , \ \pm 1/5 \ , \ \pm 2/5 \ , \ \pm 4/5$$

ملاحظة :

إذا كان $a_n = \pm 1$ فالأعداد الممثلة لـ q هي ± 1 فقط و بالتالي تبقى الأعداد المحتملة للجذور متمثلة في الأعداد p كقواسم للحد الثابت a_0 فالأعداد المحتملة كجذور للمعادلة

$$x^3 - 2x^2 - 6x - 5 = 0$$

هي ± 1 , ± 5

كيفية إيجاد الجذور العادية المحتملة :

نظرا" لأنه بالإمكان تحديد الأعداد العادية المحتملة كجذور للمعادلة من الدرجة n فإننا نستطيع أن نختبر فيما إذا كانت هذه الأعداد جذورا" لها أم لا . سنستخدم هنا للاختبار طريقة التقسيم التركيبي حيث نقبل كجذور الأعداد التي تجعل الحد الأخير من السطر الثالث صفرا" و نهمل بقية الأعداد . من خلال المثال التالي سوف نعرض طريقة العمل .

مثال :

أوجد جميع الجذور العادية للمعادلة :

$$X^5+2x^4-18x^3-8x^2+41x+30=0$$

الحل :

نظراًُ لكون $q=1$ فإن الأعدد العادية الممكنة q هي قواسم الحد الثابت $a0=30$ التالية :

$\pm 2,\pm 3,\pm 5,\pm 6,\pm 10,\pm 15\pm 30$

- لنختبر ١+ كحل ممكن :

١ –

30	41	-8	-18	2	١
18	-23	-15	3	1	
48	18	-23	-15	3	١

إذن 1+ ليس حلاً لنختبر 2+

٢ –

30	41	-8	-18	2	١
-30	-56	-20	8	2	
0	-15	-28	-10	4	١

إذن $x_1=2$ جذر للمعادلة المعطاة :

و ينتج لدينا

$$)(x^4+4x^3-10x^2-28x-15)=0$$

حيث يجب أن نبحث عن جذور :

$$X^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15=0$$

و هنا لدينا الأعداد المحتملة كجذور :

- لنختبر 3+ :

١	4	-10	-28	-15	– 3
	3	21	33	15	
١	7	11	5	0	

إن x2=3 جذر ثاني ينتج لدينا :

$$)(x-3)(x^3+7x^2+11x+^5)=0$$

حيث يجب البحث عن الجذور الثلاثة للمعادلة :

$$-7x2+11x+5=0$$

و نظراً لكون المعاملات فيها جميعها موجبة نستنتج أنه ليس لتلك المعادلة الأخيرة جذور موجبة و حيث أن قواسم الحد الثالث ١ ± و 5 ± فإنه يبقى لدينا كجذور محتملة 1- و 5- :

- لنختبر 1- :

١ –	5	11	7	1
	-5	-6	-1	
	0	5	6	1

إذن x3=-1 جذر ثالث و ينتج لدينا :

$$)(x-3)(x+1)(x^2+6x+5)=0$$

و يبقى علينا إيجاد الجذرين الأخيرين للمعادلة $x^2+6x+5=0$ (يمكن تطبيق طريقة المميز) حيث نجد الحد الثابت ± 1 و ± 5 و نظراً لكون جميع المعاملات موجبة في المعادلة نستنتج إن جذريها حتماً سالبان و هم 1 - $=x_4$ و $x_5=-5$ و يكون لدينا أخيراً .

$$2)(x-3)(x+1)(x+1)(x+5)=0$$

حيث الجذور هي :

$$-5\ ,x_3=x_4=-1\ ,\ x_2=3\ ,x_1=2$$

ملاحظة ١ :

إن الأعداد العادية الكبيرة ليست عموماً جذوراً للمعادلات و بالتالي لا حاجة لاختبارها في داية و يمكن الاستغناء عنها .

ملاحظة ٢ :

من الواضح أنه إذا كان مجموع معاملات يساوي الصفر فإن العدد ١+ هو جذر لها .

مثال :

أوجد جميع جذور المعادلة :

$-3x^{3}-4x+3=0$

الحل :

الأعداد العادية الممكنة كجذور هي :

$\pm 3 \ ,\pm \ 1/2,\pm 3/2 \ ,\pm 1/4 \ ,\pm 3/4$

و نلاحظ أن مجموع معاملات المعادلة يساوي الصفر إذن $x_1=1$ حل

١ –	4	-3	0	-4	3
		4	1	1	-3

$)(4x^{3}+x^{2}+x-3)=0$

-3/4	4	1	1	-3
		3	3	3
	4	4	4	0

و يقسمة المعادلة الأخيرة على 4 يكون لدينا :

$)(x-3/4)(x2+x+1)=0$

و بقسمة المعادلة $x2+x+1=0$ نجد أخيراً :

$)(x-3/4)[x-\{-1/2+i\sqrt{3}/2\}][x-\{-1/2-i\sqrt{3}/2\}]=0$

و الجذور هي :

$=1,x2=3/4,x3=-1/2+i\sqrt{3}/2,x4=-1/2-i\sqrt{3}/2$

ملاحظة ٣:

إذا تناوبت إشارات أمثال المعادلة فجذورها العادية ، إن وجدت ، هي أعداد موجبة .

مثال :

أوجد الجذور العادية للمعادلة :

$-32x^4+93x^3-119x^2+70x-25=0$

الحل :

نظراً لتناوب إشارات المعاملات فالجذور العادية ، إن وجدت ، هي جذور موجبة بالتالي الأعداد الممكنة كجذور هي :

1,5,1/2,5/2,1/4

4	-32	93	-119	70	25	- 5/2
	10	-55	95	-60	25	
4	-22	38	-24	10	0	

نقسم المعادلة الجديدة على 5/2

2	-11	19	-12	5	
	5	-15	10	-5	
	2	-6	4	-2	0

بقسمة الناتج الأخير على 2 نجد :

$$5/2)(x-5/2)(x^3-3x^2+2x-1)=0$$

بالنسبة للمعادلة $x3 -3x2+2x-1=0$ نجدها متناوبة الإشارات فحلولها العادية يجب أن تكون موجبة . إلا إن الحل العادي المحتمل الموجب الوحيد هو ١+ ، حيث نجد أن ١+ ليس حلاً و نستنتج أن هذه المعادلة الأخيرة ليس لها جذور عادية .

(٣-٦) قاعدة ديكارت للاشارة و عدد الجذور السالبة و الموجبة :

(٣-٦-١) – نظرية الجذور النظيرة :

إذا كانت $f(x)=0$ معادلة كثير الحدود . فإن جذور $f(-x)=0$ هي الجذور النظيرة لجذور $f(x)=0$.

إذا إعطي $f(x)$ بشكله القياسي فإننا يمكن أن نحصل على جذوره من الجذور النظيرة لمعادلة كثير الحدود الذي نستطيع أن نحصل عليه من $f(x)=0$ بتغيير إشارات حدوده بالتناوب مبتدئين أعتباراً من الحد الثاني كما في المثال التالي :

مثال :

إن جذور

$$+13x^3-13x-6=0$$

هي $-3/2$, $-2/3$, -1, 1 إذن فجذور

$$-13x^3+13x-6=0$$

هي $3/2$, $-2/3$, 1, -1

تعريف التغيرات في الإشارة و عددها في كثير الحدود $f(x)$:

إذا كان في كثير الحدود $f(x)$ المعطى بشكله العام (الحدود مرتبة بالقوى من الأكبر للأصغر) حدان متتاليان يختلفان بالإشارة فإننا نقول إن لكثير الحدود $f(x)$ تغير في الإشارة .

مثال :

إن كثير الحدود $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$ فيه تغيرات بالإشارة حيث لدينا التغيير الأول من $+x^3$ إلى $-3x^2$ و التغير الثاني من $-4x$ إلى $+12$ أما كثير الحدود $f(-x)=x^3+3x^2-4x-12$ ففيه تغير واحد بالاشارة و ذلك من $+3x^2$ الى $-4x$.

- إن $f(x)=6x^4+13x^3-13x-6$ فيه تغير واحد بالاشارة .
أما $f(x)=6x^4-13x^3+13x-6$ ففيه ثلاث تغيرات بالاشارة .
و نلاحظ أننا لا نأخذ المعاملات الصغرية بعين الاعتبار عند حساب عدد التغيرات .

(٣-٦-٢) – قاعدة ديكارت في الاشارة :

١ – إن عدد الجذور الموجبة لمعادلة كثر الحدود $f(x)=0$ ذات المعاملات الحقيقية يساوي اما إلى عدد التغيرات في اشارة $f(x)$ أو الى ذلك العدد من التغيرات مطروحاً منه عدد زوجي و يمثل الجذور المركبة للمعادلة .
٢ – إن عدد الجذور السالبة ل$f(x)$ المعتبر يساوي إلى عدد الجذور الموجبة ل$f(-x)$ [$f(-x)$ ناتج عن تبديل الإشارات بالتناوب ل $f(x)$ اعتباراً من الحد الثاني] .

مثال :

حدد عدد الجذور الموجبة و السالبة و العقدية إن وجدت ل

$f(x)=x^3-3x^2-4x+12$

الحل :

هنا لدينا تغيران في الاشارة ل$f(x)$ إذن لدينا إما جذران موجبان أو صفر جذر موجب و جذران عقديان لنأخذ الأن :

$f(-x)=x^3+3x^2-4x-12$

و لدينا تغير واحد في الاشارة إذن ل $f(-x)$ جذر واحد موجب و هو نفسه الجذر السالب ل $f(x)$.

(٣-٧) كثيرات الحدود المركبة :

(٣-٧-١) الشكل العام و النظرية الاساسية في الجبر :

الشكل العام لمعادلة كثير الحدود المركب هو :

$$a_nzn+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots\ldots+a_1z+a_0=0 \quad (!)$$

حيث نلاحظ إن أمثال هنا هي أمثال عقدية . وهذا لايمنع أن يكون بعضها معاملات حقيقية ، ذلك إن الأعداد الحقيقية هي عقدية أيضاً ينعدم فيها القسم التخيلي . أما n فهو عدد موجب صحيح يسمى بدرجة المعادلة .

نسمي أيضاً حلول هذه المعادلة بأصفار كثير الحدود $f(x)$ أو بجذور معادلته $f(x)=0$. و تنطبق على معادلة كثير الحدود العقدي أغلب القواعد و النظريات السابقة التي رأيناها في معادلة كثير الحدود ذو الأمثال الحقيقية و منها النظرية الاساسية في الجبر و التي مفادها أن لكل معادلة كثير حدود عقدي من الشكل السابق جذر عقدي واحد على الأقل . و من هنا يمكن البرهان إن لمعادلة كثير الحدود العقدي n جذر عقدي قد يكون بعضها أو جميعها مكررة .

إذا كانت $z_1,z_2,\ldots\ldots\ldots\ldots z_n$ جذور معادلة كثير الحدود المركب (١) فإننا نستطيع كتابة (١) على شكل مضاريب خطية كالتالي :

(2)

$$A_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots\ldots\ldots(z-z_n)=0$$

و بالعكس إذا استطعنا كتابة المعادلة (١) بشكل مضاريب خطية (2) فإنه يمكننا بسهولة تحديد جذور المعادلة (1)

(٣-٧-٢) حل معادلة كثير الحدود ذات الامثال المركبة (حقيقية أو عقدية):

١ – المعادلة من الدرجة الاولى ذات الشكل العادي $ax+b=0$ حيث $a\neq 0$ و a و b أعداد مركبة .

و لها حل أو جذر وحيد و هو $x=-b/a$

مثال :

أوجد حل المعادلة :

$$(1+i)x-(2-i)=0$$

الحل :

$$X=(1+i)x=(2-i)\Rightarrow$$

$$X=2-i/1+i=(2-i)(1-i)/(1+i)(!-i)=1-3i/2=1/2-3/2\quad i$$

٢ – المعادلة من الدرجة الثانية ذات الشكل العام

$$Ax^2 + bx+c =0$$

حيث $a \neq 0$ و a,b,c أعداد مركبة .

نقسم طرفي المعادلة على a فيصبح شكلها العام

$$X^2 + ax +6=0$$

باتمام المعادلة الى مربع كامل ينتج

$$\{x+a/2\}^2 + \{b - a^2/4\}=0$$

ومنه :

$$\{x+a/2\}^2 = a^2/4-b$$

و بجذر الطرفين نجد

$$X+a/2=\pm\sqrt{}a^2/4 - b\Rightarrow$$

و يكون للمعادلة جذران هما

$$X_1= -a/2+\sqrt{}a^2/4-b$$

$$X_2 = -a/2-\sqrt{}a^2/4-b$$

ملاحظة :

قبل حل المثال عن حل معادلة من الدرجة الثانية سوف ندرس طريقة إيجاد الجذر التربيعي للعدد العقدي $\sqrt{a+bi}$ حيث نفرض

$$\sqrt{a+bi} = u+vi$$

نربع الطرفين :

$$A+bi=(u+vi)^2 \Rightarrow u^2-v^2+2uvi=a+bi \Rightarrow$$

$$U^2-v^2=a$$

$$2uv=b$$

نربع الطرفين في (٢) و بالجمع نحصل

$$(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=a^2+b^2$$

و بالاختصار نحصل

$$(u^2+v^2)^2=a^2+b^2$$

و بجذر الطرفين و أخذ الإشارة الموجبة لأن الطرف اليساري حقيقي موجب

$$u^2+v^2= \sqrt{a^2+b^2} \quad (٣)$$

بحل (٢) و (٣) نجد :

$$U^2=1/2(a+\sqrt{a^2+b^2})$$

$$V^2=1/2(-a+\sqrt{a^2+b^2})$$

و بذلك نكون قد حصلنا على قيمتين للعدد ع تختلف أحداهما عن الأخرى في الاشارة فقط و كذلك للعدد v كلها قيم حقيقية لأنها جذر لأعداد تربيعية موجبة و من العلاقة (٢) لدينا

$2uv=6$

نرى الاشارة حاصل ضرب u-v يجب أن تطابق اشارة b و هكذا نحصل على اشارة u و v .

مثال :

أوجد $\sqrt{y}$ إذا علمت $y=21-20i$

الحل :

نلاحظ

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{441+400}=\sqrt{881}=29$$

$$U^2=1/2(a+\sqrt{a^2+b^2})=1/2(21+29)=25$$

$$V^2=1/2(-a+\sqrt{a^2+b^2})=1/2(-21+29)=4$$

$$\Rightarrow u=\pm 5 \qquad , \qquad v=\pm 2$$

و بما أن $b=-20$ أي اشارتها سالبة

$\sqrt{21-20i}=\pm(5-2i)$

مثال :

حل المعادلة التالية ذات الامثال المركبة

$3x+(3-i)=0$

لدينا $a=-3$, $b=3-i$

و حسب العلاقة السابقة

$= -a/2\pm\sqrt{a^2/4-b}=3/2\pm\sqrt{9/4-(3-i)}=3/2\pm1/2\sqrt{-3+4i}$

بحساب جذر $\sqrt{-3+4i}$ نجد

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$U^2=1/2(a+\sqrt{a^2+b^2})=1/2(-3+5)=1\Rightarrow u=\pm1$

$V^2=1/2(-a+\sqrt{a^2+b^2})=1/2(3+5)=4\Rightarrow v=\pm2$

و بما أن اشارة b موجبة

$\Rightarrow\sqrt{-3+4i}=\pm(1+2i)$

و منه :

$X_1=3/2+1/2(1+2i)$

$X_2=3/2+1/2(1+2i)$

٣ – المعادلة من الدرجة الثالثة ذات الشكل العام

$$Az^3+bz^2+cz+d=0 \quad (١)$$

حيث A,B,C,D أعداد مركبة نقسم على A طرفي (١) فتصبح على الشكل التالي :

$$Z^3+AZ^2+BZ+C=0 \quad (٢)$$

لإيجاد جذور هذه المعادلة نتبع كردانو ونتابع الخطوات التالية :

نفرض متحول جديد x بحيث $z = x + h$ و نعوض قيمة z الجديدة في (٢) و تحدد قيمة h بحيث تنعدم أمثال x^2 بالتعويض نجد :

$$(x + h)^3 + a(x + h)^2 + 6(x +h) + c = 0$$

$$x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + ax^2 + 2axh + ah^2 + 6x + 6h + c = 0$$

بالاختصار و الجمع نجد

$$x^3 + (3h + a)x^2 + (3h^2 + 2ah + 6)x + (h^3 + ah^2 + bh + c) = 0$$

و بإعدام أمثال x2 نجد

$$3h + a = o \quad \Rightarrow \quad h = -a/3 \quad \Rightarrow \quad z = x - a/3 \qquad (3)$$

و تصبح (٢) على الشكل التالي بعد التعويض بـ (3)

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (٤)$$

حيث $p = b - a^2/3 \ , \ q = 2a^3/27 - ab/3 + c$

نفرض مجهولين مساعدين هما u,v للمعادلة (٤) من الشكل:

$$x = u+v \qquad (٥)$$

بحيث تتحقق العلاقة :

$$u.v = -p/3 \qquad (٦)$$

نعوض من العلاقة (٤) فنحصل

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3v^2u + p(u+v) + q = 0$$

(٧)

$$u^3 + v^3 + q + 3uv(u+v) + p(u+v) = 0$$

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u+v) = 0$$

إن حل المعادلة (٧) يؤدي إلى حل المعادلتين

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

$$3uv + p = 0$$

مع ملاحظة الفرض (٥)

$$u^3 + v^3 = -q \qquad (٨)$$

$$u \, . \, v = -p/3 \;\; => u^3v^3 = -p^3/27 \qquad (٩)$$

نلاحظ من (٨) و (٩) إن u^3 و v^3 تحددان جذران لمعادلة تربيعية حيث (٨) مجموع الجذرين و (٩) جدائها و هي من الشكل

$$w^2 + qw - p^3/27 = 0$$

و حلها كما لاحظنا سابقا" هو

$$w_{1.2} = q/2 \pm \sqrt{q^2/4+p^3/27} : w_1 = u^3 \quad w_2 = v^3$$

و منه :

$$u = \sqrt[3]{-q/4+\sqrt{q^2/4+p^3/27}} \;\; ; \;\; v = \sqrt[3]{-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$$

و منه ينتج :

$$x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}+\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$$

إن هذا الدستور يحدد جذور المعادلة (٤) و يحقق الشرط $u \,.\, v = -p/3$ و لهذا السبب يحسب دوما" u_1 ثم من العلاقة $u \,.\, v = -p/3$ نحسب v_1

أما الجذرين الآخرين فنجدهم من العلاقات التالية :

$$x_2 = u_1\varepsilon_1 + v_1\varepsilon_2$$

$$x_3 = u_1\varepsilon_2 + v_1\varepsilon_1$$

حيث $\varepsilon 1$ و $\varepsilon 2$ تحسب من الجذر النوني للعدد الصحيح واحد كما يلي:

$$n\sqrt{1} = \cos 2k\pi/n + \ izin2k\pi/n \quad : \ k = 0.1.2\ldots\ldots$$

و بحساب الجذر الثالث نجد (حيث $n = 3$)

$$k = 0 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \cos 2\pi/3 + i zin 4\pi/3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$$

ثم نحسب قيمة z_3, z_2, z_1 من العلاقة $z = x - a/3$

مثال :

حل المعادلة الآتية :

$$z^3 + 3z^2 - 3z - 14 = 0 \qquad (1)$$

الحل : حسب القاعدة نفرض :

$$z = x - a/3 = z - 1$$

و بالتبديل من (١) نحصل على المعادلة

$x^3 - 6x - q = 0$: $p = -6$: $q = -9$

و بحساب

$$\sqrt{q^2/4 + p^3/23} = \sqrt{81/4 - 216/27} = \sqrt{49/4} = 7/2$$

نستنتج منه u_1 حيث

$$u_1 = {}^3\sqrt{-q/2+\sqrt{q^2/q+p^3/27}} + {}^3\sqrt{q/2+7/2} = {}^3\sqrt{8} = 2$$

و لحساب v_1 من العلاقة نجد

$u_1v_1 = -p/3 \Rightarrow v_1 = -p/3u = 6/3\text{-}2 = 1$

و منه

$x_1 = u_1 + v_1 = 3 \Rightarrow z_1 = x_1 – a/3 = 3 + 6/3 = 5$

$x_2 = u_1\varepsilon_1 + v_1\varepsilon_2 = 2(-1/2 + i\sqrt{3}/2) + (-1/2 - i\sqrt{3}/2) =-$
$/3+i\sqrt{3}/2$

و منه

$\Rightarrow z_2 = x_2 – a/3 = -3/2 + i\sqrt{3}/2 + 2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$

$x_3 = u_1\varepsilon_2 + v_1\varepsilon_1 = 2(-1/2 - i\sqrt{3}/2) + (-1/2 + i\sqrt{3}/2) = -3/2-$
$i\sqrt{3}/2$

و منه

$z_3 = x_3 - a/3 = -3/2 + i\sqrt{3}/2 + 2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$

نلاحظ أن x_3 مرافق x_2

مثال :

$x^3 + 15x + 124 = 0$

نلاحظ مباشرة أن $q = 124 \quad : \quad p = 15$

و منه

$u_1 = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{q^2/q+p^3/27}} = \sqrt[3]{-62+\sqrt{(62)2+125}} = \sqrt[3]{1} = 1$

و حسب العلاقة :

$$\Rightarrow u_1v_1 = -p/3 \;\Rightarrow\; v_1 = -p/3u_1 = -5$$

$$\Rightarrow x_1 = u_1 + v_1 = 1- 5 = -4$$

$$x_2 = u_1\varepsilon_1 + v_2\varepsilon_2 = 1(-1/2 + i\sqrt{3}/2) - 5(-1/2 - i\sqrt{3}/2) = 2 + i3\sqrt{3}$$

و منه x3 يساوي

$$x_3 = 2 - i3\sqrt{3}$$

لأنه مرافق x_2

ملاحظة هامة :

في حالة ما ضمن الجذر التربيعي أي $\sqrt{q^2/4+p^3/27}$ سالب

نتبع الطريقة التالية : نعلم أن كل معادلة تكعيبية يمكن ردها إلى الشكل

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

حيث p و q ثابتان و نجد جذور هذه المعادلة تعتمد على الخاصة المثلثية التالية

$$\text{Cos}3\theta = 4\cos3\theta - 3\cos\theta$$

و بترتيب هذه العلاقة بالشكل التالي

$$\text{Cos}^3 a - 3/4\cos\theta - 1/4\cos^3\theta = 0$$

و يمكن أن نقارن هذه المعادلة بالمعادلة التكعيبية (١) و لكن بما أن x ليس من الضروري أن تكون أصغر أو يساوي الواحد بالقيمة المطلقة بينما $1\cos a1 \leq 1$ لذلك نفرض أن $x = my$ حيث $1y1 \leq 1$ و بذلك تصبح المعادلة التكعيبية بالشكل التالي

$$m^3y^3 + pmy + q = 0$$

$$y^3 + p/m^2\ y + q/m^3 0$$

بالمقارنة بين هذه المعادلة و المطابقة المثلثية نجد أن

$$Y = \cos\theta$$

(2)

$$p/m2 = -3/4$$

(3)

$p/m3 = -1/4\cos 3$

(4)

من العلاقة (٣) نجد أن

$m = 2\sqrt{-p/3}$

و من المعادلة (٤) نجد أن

$Cos3\theta = -4q/m^3 = -4q/m \,.\, 1/m^2 = 3q/mp$

(0)

و لحسابَ نأخذ التجب العكسي للقيمة العددية 3q/mp

و لتكن ג فينتج

$\cos 3Q = \cos ג$ و نستنتج أن

$3Q = z + 2k\pi \qquad : \; k = 0.1.2$

$$\Rightarrow Q = z/3 + 2k\pi$$

إذا"

$Q_1 = z/3$ $\Rightarrow x_1 = mY_1 = m\cos Q_1$

$Q_2 = Q_1 + 2\pi/3$ $\Rightarrow$ $x_2 = mY_2 = m\cos Q_2$

$Q_3 = Q_1 + 4\pi/3$ $\Rightarrow$ $x_3 = mY_3 = m\cos Q_3$

مثال :

أوجد جذور المعادلة

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

الحل :

نلاحظ $p = -2$ ، $q = 1$: نحسب

$\sqrt{q^2/4+p^3/27} = \sqrt{1/4-8/27} = \sqrt{-5/108}$

نلاحظ ما تحت الجذر سالب لذلك لنتبع الطريقة التالية

$M = my : m=2\sqrt{-p/3} = 1.633 \quad : \quad y = \cos\theta$

حيث θ تحسب من العلاقة :

$\cos 3\theta = 3q/mp = 3/1.633-(-2) = -0.9185$

لحساب θ نأخذ التجب العكسي لـ (‎-0.9185) فينتج

$$\cos(3\theta) = \cos(156.70776) \Rightarrow$$

$$3\theta = 156.707769 + 2k\pi \quad : k = 0.1.2$$

$$\theta_1 = 52235933 = 52^0 14`$$

$$\theta_2 = 52^0 14` + 2\pi/3 = 172.14$$

$$\theta_3 = 52^0 14` + 4\pi/3 = 292^0 14`$$

و منه :

$$x_1 = my_1 = m\cos\theta_1 = 1.633 + 0.6124 = 1.000049$$

$$x_2 = my_2 = m\cos\theta_2 = -1618$$

$$x_3 = my_3 = m\cos\theta_3 = 0.618$$

تمرين : شكل معادلة $f(\mathbf{x}) = ٠$ بثوابت صحيحة و بأصغر درجة ممكنة بحيث يكون $2 - 3i$ ، $\sqrt{5}$

جذرين لتلك العلاقة.

حتى تكون هذه الجذور للمعادلة يجب أن يكون المرافقان $2 - 3i$ ، $\sqrt{5}$

جذرين للمعادلة المراد تشكيلها.

$f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

$a_1 = \sqrt{5} \qquad a_3 = 2 - 3i$

$a_2 = -\sqrt{5} \qquad a_4 = 2 + 3i$

$a_0 = 1$

$a_1 = -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = -4$

$a_2 = -(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)$

$a_2 = 8$

(٣ – ٤) – المعادلات غير الخطية بعدة متحولات:

إن طرق حل جملة معادلات غير خطية بأكثر من متحول يعتمد على شكل الجملة ذاتها.

سوف ندرس حل جملة معادلتين بمتحولين مستعرضين طريقة الحل حسب طبيعة الجملة ومن خلال أمثلة مباشرة.

إن الشكل العام لمعادلة غير خطية ذات متحولين x و y هو :

$$Ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

حيث a ، b ، c ، d ، e ، $f \in R$

من الواضح أنه لا يمكن حل هذه المعادلة إلا بإعطاء قيمة معينة لأحد ولكن إذا كان لدينا معادلة أخرى بمتحولين فإنه يمكننا عندئذ حل الجملة.

١. حل جملة معادلتين إحداهما خطية :

طريقة الحل: نحل أحدى المعادلة الخطية بالنسبة لأحد المتحولين ونعوض في الثانية كما هو موضح في المثال التالي:

أوجد حلول جملة المعادلتين التاليتين:

1. $4x^2 + 3y^2 = 16$

2. $5x + Y = 7$

الحل :

لنحل المعادلة (٢) بالنسبة ل y

3. $Y = 7 - 5x$

لنعوض في (١)

$$4x^2 + 3(7 - 5x)^2 = 16$$

و بالا صلاح

4. $79x^2 - 210x + 131 = 0 \Rightarrow$

$X_2 = \frac{131}{79}$, $x_1 = -1$

نعوض $x_1 = +1$ في (٢) فنحصل على $y = 2$ و يكون

٢. حل جملة معادلتين كل منهما من

الشكل $ax^2 + by^2 = c$:

طريقة الحل : نتخلص من حذف احد المتحولين لجمع (طرح) المعادلتين

مثال:

أوجد حل جملة المعادلتين التاليتين :

1. $4x^2 + 9y^2 = 72$

2. $3x^2 - 2y^2 = 19$

الحل : لنضرب (١) ب (٢) و (٢) ب٩ و نجمع المعادلتين:

$8x^2 + 18y^2 = 144$

3. $27x^2 - 18y^2 = 171$

$35x^2 = 315$

من (٣) نجد $x^2 = 9$ ، إذن $x_1 = \pm 3$

من أجل $x_1 = 3$ نعوض في (١) أيضا:

$y = \pm 2$ و منه $9x^2 = 72 - 36 = 36$

x_2 نعوض في (١) أيضا:

$y = \pm 2$ و منه $9x^2 = 72 - 36 = 36$

حلول وهي الممثلة بالثنائيات (x , y) التالية:

$(3,2), (3,-2), (-3,2), (-3,-2)$

٣. حل جملة معادلتين احدهما متجانسة:

نقول عن التعبير الرياضي المماثل لــ $2x^2 - 3xy + y^2$ الذي تظهر فيه جميع حدوده من نفس الدرجة انه متجانس.

إذا ساوى هذا التعبير الصفر فإننا نقول عنه انه معادلة متجانسة.

إذا ضمت جملة المعادلتين معادلة متجانسة فإننا نقوم بحلها بالنسبة لأحد المتحولين ومن ثم نعوض في الثانية.

1. $X^2 - 3xy + 2y^2 = 0$
2. $2x^2 + 3xy - y^2 = 13$

الحل:

من (١) لدينا:

$$(x-y)(x-2y) = 0$$

إذن: $x = y$ و $x = 2y$

من أجل $x = y$ نعوض في (٢):

$$2y^2 + 3y^2 - y^2 = 13$$

$$4y^2 = 13$$

$$Y = \pm\sqrt{13/4}$$

إذن $x = y = \pm\sqrt{13/4}$ ولدينا الحل الأول :

$$(\quad , \sqrt{13/4}) \;,\; (-\sqrt{13/4} , -\sqrt{13/4} \quad)\sqrt{13/4}$$

من أجل $x = 2y$ نعوض أيضا في (٢):

$$8Y^2 + 6Y^2 - Y^2 = 13$$

$$13Y^2 = 13$$

$$Y = \pm 1$$

$$X = 2Y = \pm 2$$

و الحلول هي:

$(2,1),(-2,-1)$

٤. حل

جملة معادلتين كلاهما من الشكل $ax^2 + bxy + cy^2 = d$

لحل هذه الجملة نعالج المعادلتين مع بعضهما البعض للحصول على معادلة متجانسة ثم نعالج هذه المعادلة مع أحدى المعادلتين بنفس الأسلوب السابق.

مثال:

أوجد حل جملة المعادلتين التاليتين:

1. $3x^2 + 8y^2 = 140$

2. $5x^2 + 8xy = 84$

الحل:

نضرب الأولى بـــ -3 ونضرب الثانية بـــ ٥ ثم نجمع:

$$-9x^2 - 24y^2 = -420$$

3. $25x^2 + 40xy = 420$

$$16x^2 + 40xy - 24y^2 = 0$$

نحل (٣):

$$16x^2 + 40xy - 24y^2 = 8(2x^2 + 5xy - 3y^2) = 0$$

$$= 8(2x - y)(x + 3y) = 0$$

أما $x = 1/2y$ ، نعوض في (١) :

$$y^2 + 8y^2 = 140\tfrac{3}{4}$$

$$35y^2 = 560$$

$$Y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

$$X = 1/2 \rightarrow y = \pm 2$$

و الحل هو:

$$(2,4), (-2, -4)$$

و أما $x = -3y$ نعوض في (١) أيضا :

$$27y^2 + 8y = 140$$

$$35y^2 = 140$$

$$Y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

إذن

$$x = -3y = \pm 6$$

والحل هو:

$$(6, -2), (-6, 2)$$

٥. حل جملة

معادلتين كل منهما متناظرة بالنسبة لــ X و Y :

نقول عن المعادلة بمتحولين ومن الدرجة الثانية أنها متناظرة إذا لم تتبدل المعادلة بمبادلة متحوليها كالمعادلة:

$$2X^2 - 3XY + 2Y^2 + 5X + 5Y = 1$$

لحل جملة معادلتين متناظرتين نعوض $X = U + V$ و $Y = U -$ V في المعادلتين و نعاملهما مع بعضهما بشكل نتخلص به من V^2 .

مثال:

أوجد حل جملة المعادلتين التاليين:

1. $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8$
2. $xy + 4x + 4y = 2$

الحل:

لنلاحظ أن كلا من المعادلتين متناظرة نضع $y = u - v$ و $x = u + v$ و نعوض في الجملة.

$$(u + v)^2 + (u - v)^2 + 3(u + v) + 3(u - v) = 8$$

$$(u + v)(u - v) + 4(u + v) + 4(u - v) = 2$$

أو أيضا :

$$3. \quad 2u^2 + 2v^2 + 6u = 8$$

$$4. \quad u^2 - v^2 + 8u = 2$$

لنتخلص الآن من v^2 و ذلك بضرب (٤) بـــــ ٢ وجمعها مع (٣) ينتج:

$$4u^2 + 22u - 12 = 2(2u^2 + 11u - 6) = 0$$

$$2(2u - 1)(u + 6) = 0$$

و حلولها هي: $u = 1/2$ ، $u = -6$

من أجل $u = 1/2$ نعوض في (٤) وينتج :

$$V^2 = u^2 + 8u - 2 = 9/4 \rightarrow v = \pm 3/2$$

إذن عندما $u = 1/2$ و $v = -3/2$ نجد :

$$Y = u - v = -1 \qquad , \qquad x = u + v = 2$$

و لدينا الحلين: $(-1, 2)$ و $(2, -1)$

ومن أجل $u = -6$ نعوض في (٤) و ينتج:

$$V^2 = u^2 + 8u - 2 = -14 \rightarrow v = \pm i\sqrt{14}$$

و إذن عندما $v = i\sqrt{14}$ و $u = -6$ نجد:

$$x = u + v = -6 + i\sqrt{14}$$

$$y = u - v = -6 - i\sqrt{14}$$

و عندما $u = -6$ و $v = - i\sqrt{14}$ نجد:

$$X = u + v = -6 - i\sqrt{14}$$

$$Y = u - v = -6 + i\sqrt{14}$$

و الحلين هما:

$$(-6 + i\sqrt{14}, \ -6 - i\sqrt{14})$$

$$(-6 - i\sqrt{14}, \ -6 + i\sqrt{14})$$

كما اشرنا أعلاه إن حل جملة معادلات غير خطية تعتمد الأسلوب المناسب لطبيعة الجملة، وقد يناسب الجملة عدة أساليب لحلها، كما قي المثال التالي:

مثال:

أوجد حل حملة المعادلتين التاليتين:

1. $x^2 + y^2 = 25$
2. $xy = 12$

الحل:

نلاحظ أن المعادلتين متناظرة بالنسبة لـــــ x و y ، فإننا يمكن أن نحل الجملة كما يلي:

نضرب (٢) بـــ ٢ و نضيفها إلى (١) فنحصل على:

$$X^2 + 2xy + y^2 = 49$$

أو

$x + y = 7$

x و

$+ y = -7$

ثم نضرب (٢) بـــ ٢ ونضيفها إلى (١) فنحصل على:

$X^2 - 2xy + y^2 = 1$

أو

و $x - y = 1$

$x - y = -1$

و لدينا الجمل التالية:

الحل (4,1) => $x + y = 7$

I $x - y = 1$

الحل (3,4) => II $x + y = 7$

$x - y = -1$

$x + y = -7$ => } (-3,-4) الحل

III

$x - y = 1$

$x + y = -$ => } (-4,-3) الحل

IV 7

$x - y = -1$

أسلوب اخر في الحل:

من (٢) لدينا $x = 12/y$ ، نعوض في (١) فنحصل على:

$$X^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

أو

$$(x - 4)(x - 3)(x + 3)(x + 4) = 0$$

و هكذا نجد قيم y المرافقة للقيم الأبعة لــ x المحققة للمعادلة الأخيرة و ذلك بالتعويض في (٢)

مثال :

أوجد حل جملة المعادلتين التاليتين :

$$x^3 - y^3 = 25 \qquad (1)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 19 \qquad (2)$$

الحل :

بقسمة (١) على (٢) نحصل على :

$$x = y + 1 \qquad (3)$$

أو

نعوض في (٢) و نحصل على :

$$(y + 1)^2 + (y + 1)y + y^2 = 19$$

أو بالإصلاح :

$$3y^2 + 3y - 18 = 3(y+3)(y-2) = 0$$

إذن بالتعويض في (٣):

من أجل $y = -3$ لدينا $x = -2$ و $(-2,-3)$ حل

ومن أجل $y = 2$ لدينا $x= 3$ و $(3,2)$ حل

مسائل و تمارين غير محلولة

١- تأكد من إن لكل من جمل المعادلات التالية حل وحيد ثم أوجده باستخدام طريقة التعويض و طريقة توحيد المعاملات و قاعدة كرامر و المصفوفات :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 4 \end{cases}$$

الجواب $x_1 = -2$

$x_2 = 3.5$

الجواب $x_1 = \ , x_2 = 2 , x_3 = 3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 41 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

الجواب $x_1 = 1 , x_2 = -1 , x_3 = 2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

٢- أوجد حل جملة المعادلات التالية باستخدام طريقة المعاملات المنفصلة ، أي بتحويل [A B] إلى [I C]

الجواب $x_1 = 1/2$, $y = -1$, $z = 3/2$

$$\begin{cases} x - 5y + 3z = 9 \\ 2x - y + 4z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

٣- اختبر أولا" قابلية الحل لكل من جملتي المعادلات التالية ثم أوجد هذا الحل بالاختزال :

الجواب الجملة غير قابلة للحل

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

الجواب : $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 3x - y - 4z = 7 \\ 5x + 2y - 6z = 5 \end{cases}$$

٤- هل لكل من جملتي المعادلات التالية حلول غير الحل الصفري و ما هي :

الجواب $x1 = -x2 = -x3 = a$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

الجواب $x_1 = -3a$, $x_2 = 0$, $x_3 = a$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

٥- أوجد حلول جمل المعادلات التالية:

الجواب (1,1) و (2.555,-7/9)

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3x = 6 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

الجواب (6,3) مكرر

$$\begin{cases} 2y^2 - 3x = 0 \\ 4y - x = 6 \end{cases}$$

الجواب (2,5) (-13/16,5/4)

$$\begin{cases} y^2 + 4y - 3x + 1 = 0 \\ 3y - 4x = 7 \end{cases}$$

الجواب (6,-9)(6,9),(-6,9),(-6,9)

$$\begin{cases} 3x2 - y2 = 27 \\ x2 - y2 = -45 \end{cases}$$

الجواب (4,-2)(4,2)(-4,2),(-4,-2)

$$\begin{cases} 5x2 + 3y2 = 92 \\ 2x2 + 5y2 = 52 \end{cases}$$

الجواب (-4,1)(4,-1)(0,-√21)(0,√21)

$$\begin{cases} x2 + 4xy = 0 \\ x2 - xy + y2 = 21 \end{cases}$$

الجواب ,-√3/3)(√3/3,-4√3/3)